Total number of printed pages – 8

U25 – E26 (MAT2104C)

2026

MATHEMATICS

(Major)

Paper : MAT2104C

(Calculus)

Full Marks : 45

Time : Two hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : 1×4=4

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Write the nth derivative of $(ax+b)^m$ if $m<n$.

$m<n$-ৰ বাবে $(ax+b)^m$ - ৰ n-তম অৱকলজ লিখা।

(b) Define point of inflexion.

নমন বিন্দুৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(c) Write the necessary condition for the vector $\vec{a}(t)$ to be constant.

ভেক্টৰ $\vec{a}(t)$ এটা ধ্ৰুৱক মান হোৱাৰ প্ৰয়োজনীয় চৰ্তটো লিখা।

(d) Write the value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, where n is a positive integer.

n এটা ধনাত্মক অখণ্ড হ'লে $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ -ৰ মান লিখা।

2. Answer the following questions : 2×3=6

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Find the asymptotes parallel to y-axis of the curve $(x^2+y^2)x - ay^2 = 0$.

$(x^2+y^2)x - ay^2 = 0$ বক্ৰৰ y-অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x}$$

(c) Prove that $div\ \vec{r} = 0$.

প্ৰমাণ কৰা যে $div\ \vec{r} = 0$ ।

3. Answer the following questions :

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Obtain the meduction formula of $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$. Also prove that

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \text{ if } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx.$$ 5

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ -ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো উলিওৱা আৰু দেখুওৱা যে $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ য'ত

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx.$$

(b) If $y = \sin\left(m \sin^{-1} x\right)$, then show that

(i) $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$

(ii) $\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + \left(m^2 - n^2\right)y_n = 0$

5

$y = \sin\left(m \sin^{-1} x\right)$ হ'লে দেখুওৱা যে

(i) $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$

(ii) $\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + \left(m^2 - n^2\right)y_n = 0$

Or / বা

(c) By forming in two different ways the nth derivative of x^{2n}, show that

$$1 + \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2} + \ldots = \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$$ 5

দুটা ভিন্ন পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি x^{2n}-ৰ n-তম অৱকলজ উলিয়াই দেখুওৱা যে

$$1 + \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2} + \ldots = \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$$

(d) Find the radius of curvature at the point θ on the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$. 5

$x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ বক্ৰৰ θ বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসাৰ্দ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

Or / বা

(e) For a polar curve $r = f(\theta)$ derive radius of curvature $\rho = \dfrac{\left(r^2 + r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2}$

where $r_1 = \dfrac{dr}{d\theta}$

$r_2 = \dfrac{d^2 r}{d\theta^2}$. 5

$r = f(\theta)$ বক্ৰৰ বাবে দেখুওৱা যে বক্ৰতা ব্যাসাৰ্দ্ধ

$$\rho = \frac{\left(r^2 + r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2}$$ য'ত $r_1 = \dfrac{dr}{d\theta}$

$r_2 = \dfrac{d^2 r}{d\theta^2}$ ।

$\frac{1}{2}(-2x)^{3/2}(1-x^2)^{1/2}$ $(1-x^2)^{n-2}$

4. Answer either *(a)* **or** *(b)* :

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ *(a)* বা *(b)* অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) *(i)* Show that the tangent to the curve $x^3 + y^3 = 3axy$ at the point other than the origin where it meets the parabola $y^2 = ax$ is parallel to y-axis. 5

দেখুওৱা যে $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ৰৰ মূলবিন্দুৰ বাহিৰে অন্য বিন্দুত য'ত বক্ৰডালে $y^2 = ax$ অধিবৃত্তক স্পৰ্শ কৰে সেই বিন্দুত টনা স্পৰ্শক y-অক্ষৰ সমান্তৰাল।

(ii) Find the whole length of the asteriod $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 5

Asteriod $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্ৰৰ বক্ৰ দৈৰ্ঘ্যতা নিৰ্ণয় কৰা।

(b) *(i)* Find all the asymptotes to the curve 5

$$y^3 - x^2y - 2xy^2 + 2x^3 - 7xy + 2y^2 + 2x^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$$

$$y^3 - x^2y - 2xy^2 + 2x^3 - 7xy + 2y^2 + 2x^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

বক্ৰৰ আটাইকেইডাল অনন্তস্পৰ্শী ৰেখা উলিওৱা।

(ii) Find the value of a, b and c so that

$$\lim_{x \to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2$$ 5

a, b আৰু c-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাতে

$$\lim_{x \to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2$$

5. Answer either part *(a)* **or** *(b)* :

(a) বা *(b)* অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) I. *(i)* Prove that *div curl* $\vec{A} = 0$ where

$$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$$

(ii) Curl grad $\phi = 0$ 5

প্ৰমাণ কৰা যে

(i) *div curl* $\vec{A} = 0$ য'ত

$$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$$

(ii) Curl grad $\phi = 0$

(II) The arc of the astroid $x = a\cos^3\theta$ $y = a\sin^3\theta$ from $\theta = 0$ to $\theta = \frac{\pi}{2}$ revolves about x-axis. Show that the volume and surface area of the solid

generated are respectively $\frac{16}{105}\pi a^3$ and

$\frac{6}{5}\pi a^2$. 5

$x = a\cos^3\theta \quad y = a\sin^3\theta$ বক্ৰই $\theta = 0$ ৰ পৰা

$\theta = \frac{\pi}{2}$ লৈ x অক্ষৰ সাপেক্ষে কৰা আৱৰ্তনৰ ফলত

সৃষ্টি হোৱা আৱৰ্তিত কঠিন বস্তুৰ আয়তন আৰু পৃষ্ঠকালি

ক্ৰমে $\frac{16}{105}\pi a^3$ আৰু $\frac{6}{5}\pi a^2$ বুলি দেখুওৱা।

(b) *(i)* Prove that

$$curl\left(\phi\vec{A}\right) = \left(grad\,\phi\right)\times\vec{A} + \phi\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right).$$ 5

প্ৰমাণ কৰা যে

$$curl\left(\phi\vec{A}\right) = \left(grad\,\phi\right)\times\vec{A} + \phi\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$ ।

(ii) Trace the following curve : 5

$$xy^2 + (x+a)^2(x+2a) = 0$$

তলত দিয়া বক্ৰডাল অংকন কৰা ঃ

$$xy^2 + (x+a)^2(x+2a) = 0$$